Sonderabdruck aus der »Zeitschrift für gewerblichen Unterricht«. Jahrgang XVIII, No. 12 und 13.

Die Geometrie krummliniger Figuren Leonardo da Vinci's.

Von

Professor **Th. Beck** in Darmstadt.

Leonardo, 1452 zu Vinci, einem Marktflecken im Gebiete von Florenz geboren, war nach seinem Tode Jahrhunderte lang nur als einer der gröfsten Maler und Bildhauer bekannt. Erst in neuerer Zeit liefs das Studium seiner schwer zu lesenden Manuskripte und die genauere Erforschung seines Lebens die wunderbare Begabung erkennen, welche ihn als Ingenieur, Physiker, Mathematiker, Anatom und Musiker gleichfalls Hervorragendes leisten liefs.

In Mailand, wohin ihn in seinem dreifsigsten Lebensjahre Ludovico Sforza als Violinspieler berief, gründete er eine Akademie der Künste und exakten Wissenschaften und wirkte als Lehrer mehr noch, denn als Künstler. Als Ludovico Sforza 1499 durch Louis XII. von Frankreich vertrieben wurde, kehrte Leonardo nach Florenz zurück; doch verleidete ihm die Unsicherheit der politischen Verhältnisse den längeren Aufenthalt in seiner Vaterstadt. 1502 trat er als Ingenieur in Cesare Borgia's Dienste und ging 1507 auf Bitten seiner Freunde und infolge einer Aufforderung König Louis' XII. wieder nach Mailand, wo ihn dann hauptsächlich der Bau des Martesana-Kanales, des Bassin's St. Cristoforo und Quellenbohrungen in der Ebene von Lodi-Giano beschäftigten. 1512, als Maximilian Sforza Mailand wieder eroberte, war Leonardo in Florenz und ging 1514, in seinem 62. Lebensjahre, zur Thronbesteigung des Papstes Leo X. nach Rom. Da aber hier der 31 jährige Raffael und der 39 jährige Michel Angelo bereits auf dem Gipfel ihres Ruhmes standen, und der Papst dem alten Meister, welcher als ein Franzosenfreund angesehen wurde, seine Gunst versagte, kehrte dieser im folgenden Jahre zum Einzuge des Königs Franz I. von Frankreich nach Mailand zurück. Die Verehrung und Freundschaft, welche der ritterliche König ihm hier entgegenbrachte, bewogen ihn in seinem 65. Lebensjahre, mit ihm nach Frankreich zu ziehen, wo er zu Amboise, mit dem Projekte des Kanales von Romorantin beschäftigt, noch zwei Jahre hochgeehrt lebte und zu St. Cloux im Jahre 1519 starb.

Seine Manuskripte, Instrumente und Gemälde vermachte er seinem Lieblingsschüler Francesco Melzi, der ihm nach Frankreich gefolgt war. Dieser brachte sie nach Italien zurück und bewahrte sie fünfzig Jahre lang in seiner Villa di Vaprio mit gröfster Sorgfalt; aber seine Erben, die andere Neigungen hatten, verschenkten 13 Bände von Leonardo's Manuskripten an den Ingenieur und Festungsbaumeister Mazzenta, und einen anderen Teil derselben erhielt Pompeo Leoni, der bevorzugte Bildhauer des Königs Philipp II. von Spanien. Durch diesen wurden die Melzi veranlafst, die dem Mazzenta geschenkten Bände zurückzuverlangen und erhielten sieben Bände wieder, die wahrscheinlich dann dem Leoni überlassen wurden. Drei von den sechs Bänden, die Mazzenta nicht zurückgab, konnten später in den Besitz Leoni's gelangen, der dann aus mehr denn 1700 Handzeichnungen auf 402 Blättern einen Band von 67 cm Höhe und 45 cm Breite herstellen liefs, welcher seiner Atlasform wegen den Namen Codice Atlantico erhielt. Von Madrid dürfte dieser nach Italien zurückgekommen sein, als Leoni gegen 1604 sich kurze Zeit in Mailand aufhielt. Nach seinem Tode fiel der Codice Atlantico einem Cleodoro Calchi durch Erbschaft zu, der ihn für 300 scudi dem Grafen Galeazo Arconati verkaufte, und dieser schenkte ihn im Jahre 1637 der Bibliotheca Ambrosiana in Mailand, welche auch noch andere Manuskripte Leonardo's erwarb. Als 1796 die Franzosen unter Bonaparte in Mailand einrückten, liefsen sie die Manuskripte Leonardo's mit vielen erbeuteten Kunstschätzen nach Paris bringen, doch mufste der Codice Atlantico nach dem Friedensschlusse im Jahre 1815 der Bibliotheca Ambrosiana zurückgegeben werden, während die kleineren Manuskripte Leonardo's im Institut de la France in Paris blieben.

Letztere sind um das Jahr 1890 durch Heliogravüre vervielfältigt und mit französischer Uebersetzung des Textes durch M. Ravaisson-Molien in sechs Foliobänden herausgegeben worden, und seit 1896 veröffentlicht die Academia dei Lincei mit Unterstützung der italienischen Regierung die im Codice Atlantico enthaltenen Manuskripte Leonardo's in ähnlicher Weise. Dieses Werk soll in 35 Lieferungen herausgegeben werden, wovon bis jetzt 27 erschienen sind.

Die den Maschinenbau und das Ingenieurwesen betreffenden Aufzeichnungen Leonardo's, welche in den im Besitze des Institut de la France befindlichen Manuskripten und in den ersten fünf Lieferungen des Codice Atlantico enthalten sind, finden sich in den »Beiträgen zur Geschichte des Maschinenbaues« (zu beziehen durch Julius Springer in Berlin) von dem Verfasser vorliegender Abhandlung zusammengestellt. In den weiteren, bis jetzt erschienenen Lieferungen des Codice Atlantico nehmen die geometrischen Handzeichnungen und Betrachtungen, mit welchen sich vorliegende Abhandlung beschäftigt, einen so groſsen Raum ein, daſs daraus auf ein sehr groſses Interesse zu schlieſsen ist, welches Leonardo ihnen schenkte. Ob er dabei nur einen wissenschaftlichen, oder auch künstlerische und praktische Zwecke im Auge hatte, müssen wir dahingestellt sein lassen, da er sich in seinen schriftlichen Bemerkungen nicht darüber ausspricht, doch erscheinen uns seine Untersuchungen über die Flächengleichheit krummliniger Figuren zu künstlerischen und praktischen Zwecken verwendbar. Schon die Mannigfaltigkeit der Formen, die sich dabei dem Auge darbieten, reizt dazu an, Flächenornamente daraus zu bilden, und gleiche Gröſse der Figuren, aus denen ein solches Ornament zusammengesetzt ist, dürfte dazu beitragen, daſs es einen ruhigen, harmonischen Eindruck macht.

Aus den drei einfachen geometrischen Sätzen:

1. Zwei Flächen sind gleich groſs, wenn sie sich in Teile zerlegen lassen, die zusammen den gleichen Flächeninhalt haben,
2. Ein Quadrat ist halb so groſs als das Quadrat seiner Diagonalen,
3. Die Flächeninhalte von Kreisen verhalten sich wie die Quadrate ihrer Radien,

leitet Leonardo die Flächeninhalte einer groſsen Zahl von Figuren ab, deren Begrenzung aus Kreisbogen oder aus Kreisbogen und geraden Linien zusammengesetzt ist. Er sagt:

»Der Flächeninhalt einer Figur bleibt der gleiche, wenn man an einer Seite derselben einen Teil herausschneidet und ihn an einer anderen ihrer Seiten ansetzt.«

In Figur 1 ist daher der Flächeninhalt der krummlinigen Figur so groſs, wie das punktierte Dreieck, und in Figur 2 ist er so groſs, wie das punktierte Rechteck.

In Figur 3 ist der nicht schraffierte Teil so groſs, wie das punktierte Quadrat, und die schraffierten Teile sind zusammen so groſs, wie die beiden punktierten Rechtecke, oder so groſs, wie zwei

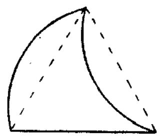

Fig. 1.

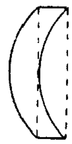

Fig. 2.

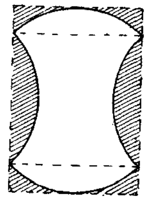

Fig. 3.

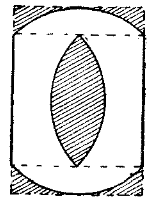

Fig. 4.

der krummlinigen Figuren in Fig. 2, weil sämtliche Kreisbogen in diesen Figuren den gleichen Radius und einen Rechten zum Zentriwinkel haben.

Dasselbe gilt von Fig. 4, weil hier nur die beiden Kreisabschnitte, welche in Fig. 3 an den Seiten ausgeschnitten sind, in die Mitte versetzt und zu einem ausgeschnittenen Zweiecke vereinigt sind.

In Fig. 5 kommen Kreisabschnitte, deren Zentriwinkel ein Rechter ist, von drei verschiedenen Gröſsen vor. Ein gröſster Kreisabschnitt, über der Diagonalen des Quadrates, ist so groſs, wie zwei von den vier mittleren über den Seiten des Quadrates. Zwei der kleinsten Kreisabschnitte, über der Hälfte der Diagonalen des Quadrates, sind zusammen halb so groſs, wie ein gröſster, daher ist eine der schraffierten Doppelsicheln so groſs wie zwei kleinste Kreisabschnitte, oder so groſs, wie einer der mittleren. Die beiden Doppelsicheln sind so groſs, wie die beiden kleinen Zweiecke.

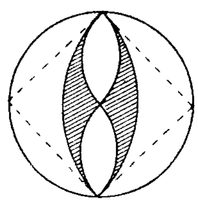

Fig. 5.

Die beiden nicht schraffierten Mondsicheln in Fig. 5 sind zusammen so groſs, wie das hineinpunktierte Quadrat, weil sie aus diesem entstehen, wenn man auſsen vier mittlere Kreisabschnitte zufügt und in der Mitte zwei gröſste Kreisabschnitte herausschneidet.

Ebenso sind in den Figuren 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 und 13 die nicht schraffierten Teile jeder Figur zusammen so groſs, wie das in den gröſsten Kreis eingeschriebene Quadrat, weil sie aus diesem

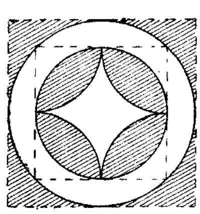

Fig. 6.

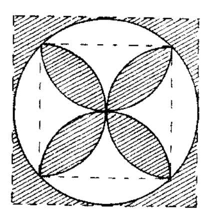

Fig. 7.

entstehen, wenn man Kreisabschnitte daransetzt und andere herausschneidet, welche zusammen denselben Flächeninhalt haben, wie die darange-

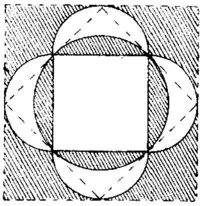
Fig. 8.

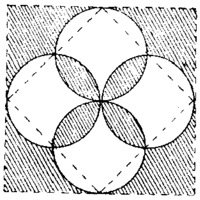
Fig. 9.

setzten. Und da das um den gröfsten Kreis beschriebene Quadrat doppelt so grofs ist, als das eingeschriebene, so sind auch in diesen Figuren

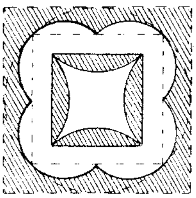
Fig. 10.

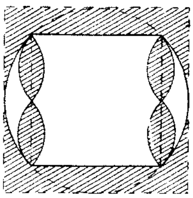
Fig. 11.

die schraffierten Teile zusammen so grofs, wie die nicht schraffierten.

Setzt man aufsen an die vier nicht schraffierten

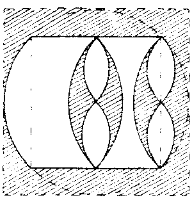
Fig. 12.

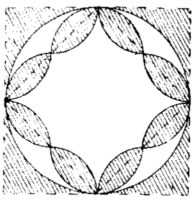
Fig. 13.

Blätter der Fig. 7 Mondsicheln ähnlich denen in Fig. 5, aber so grofs, dafs ihr innerer Kreisbogen dem äufseren der Blätter gleich ist, so entsteht eine Form ähnlich Fig. 9, aber doppelt so grofs.

Auch in Fig. 14 ist der Flächeninhalt der nicht schraffierten Teile gleich dem des in den gröfsten Kreis eingeschriebenen Quadrates, weil die an dieses Quadrat angesetzten beiden Kreisabschnitte denselben Flächeninhalt haben wie die acht aus der Figur herausgeschnittenen Kreisabschnitte.

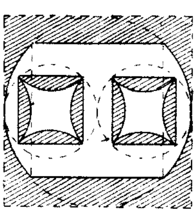
Fig. 14.

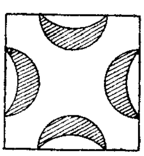
Fig. 15.

In Fig. 15 sind aus dem Quadrate vier Mondsicheln ähnlich denen in Fig. 5 ausgeschnitten, deren Durchmesser halb so grofs ist, als die Quadratseite. Der Flächeninhalt der vier Mondsicheln ist daher gleich einem Viertel des Quadrates und die nicht schraffierten Teile der Figur sind zusammen gleich drei Vierteln des Quadrates.

Fig. 16 entsteht, wenn man aus den nicht schraffierten Teilen der Fig. 7 die soeben beschriebenen vier Mondsicheln ausschneidet. Die nicht schraffierten Teile der Fig. 16 sind daher wieder so grofs, wie drei Viertel des in den gröfsten Kreis eingeschriebenen Quadrates oder drei Achtel des darum beschriebenen Quadrates, und die schraf-

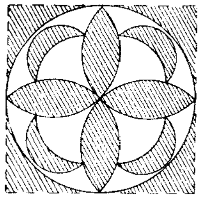
Fig. 16.

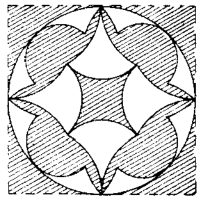
Fig. 17.

fierten Teile der Figur betragen zusammen fünf Achtel desselben.

Das gleiche gilt von Fig. 17, da diese aus Fig. 16 durch Umkehrung und Versetzung der vier mittleren nicht schraffierten Blätter entsteht.

In Fig. 18 sind die vier mittleren nicht schraffierten Blätter für sich quadrierbar und die übrigen

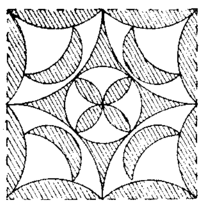
Fig. 18.

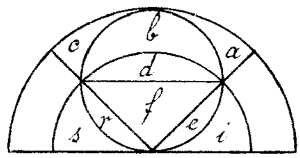

Fig. 19.

nicht schraffierten Teile ebenfalls, weil sie durch Umkehrung der vier Viertel von Fig. 16 um ihre Diagonale entstehen.

In Fig. 19 ist der gröfste Kreis doppelt so grofs, als der mittlere und dieser doppelt so grofs, als der kleinste. Der Ring zwischen der Peripherie des gröfsten und der des mittleren Kreises ist daher so grofs, wie dieser.

Das Viertel $c + b + a$ dieses Ringes ist gleich dem Halbkreise $b + d$, folglich $c + a = d$; da aber $c = a$ und $e = r = \frac{d}{2}$, so ist auch $a = e = c = r$ und je zwei dieser Teile zusammen gleich d.

Der halbe mittlere Kreis ist gleich dem ganzen kleinsten Kreise. Zieht man den beiden gemeinschaftlichen Teil von beiden ab, so bleibt: $i + s = b$.

Der halbe kleinste Kreis $b + d$ ist gleich dem Viertel $d + f$ des mittleren Kreises, daher $b = f$, wie schon aus Fig. 5 hervorging, also auch $i + s = f$, wie bereits aus Fig. 7 hervorging.

Fig. 20. Die halbe Ringfläche zwischen der Peripherie des gröfsten und der des mittleren Kreises ist so grofs wie der kleinste Kreis, und die beiden halben Abschnitte $p + q$ des gröfsten Kreises sind zusammen so grofs, wie das Zweieck k, welches von

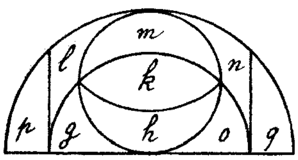

Fig. 20.

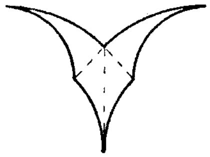

Fig. 21.

zwei Bogen des mittleren Kreises, deren Zentriwinkel ein Rechter ist, begrenzt wird. Also ist $p + l + m + n + q = m + k + h$, und da $p + q = k$, so ist $l + m + n = m + h$ und $l + n = h = m$.

Fig. 22.

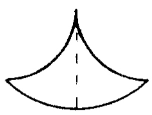

Fig. 23.

Fig. 24.

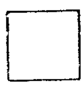

Fig. 25.

Da aber auch $g + o = h$, wie vorhin bewiesen wurde, so ist auch $n + l = g + o = h = m = f$ (in Fig. 19).

Die Figuren 21, 22, 23, 24 und 25 haben also gleichen Flächeninhalt.

In Fig. 26 (Vergl. Fig. 4) sind die nicht schraffierten Teile zusammen so grofs, wie das in den gröfsten Kreis eingeschriebene Quadrat. Das umschriebene Quadrat ist doppelt so grofs, also sind die schraffierten Teile zusammen so grofs, wie die nicht schraffierten. Die Mondsicheln sind so grofs, wie das in sie eingeschriebene Quadrat, also sind auch die Ringteile, welche die Mondsicheln umschliefsen, so grofs wie diese, was schon aus Fig. 20 hervorging.

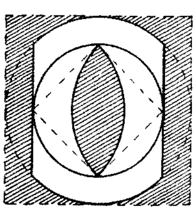

Fig. 26.

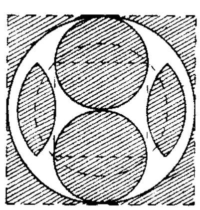

Fig. 27.

In Fig. 27 sind die schraffierten Zweiecke aus vier Abschnitten vom mittleren Kreise zusammengesetzt, und die schraffierten kleinsten Kreise sind zusammen so grofs, wie der Ring zwischen der Peripherie des gröfsten und der des mittleren Kreises, folglich sind die nicht schraffierten Teile der Figur so grofs, wie das in den mittleren Kreis eingeschriebene Quadrat. Das um den gröfsten Kreis beschriebene Quadrat ist viermal so grofs, also betragen die nicht schraffierten Teile dieser Figur ein Viertel und die schraffierten drei Viertel dieses gröfsten Quadrates.

In Fig. 28 sind die nicht schraffierten Teile zusammen so grofs, wie die beiden punktierten Dreiecke, oder so grofs, wie die beiden in die kleinsten Kreise eingeschriebenen Quadrate, weil die aus den Dreiecken geschnittenen Kreisabschnitte so grofs sind, wie die an die Dreiecke gesetzten Sichelenden (a und c in Fig. 19).

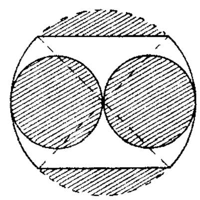

Fig. 28.

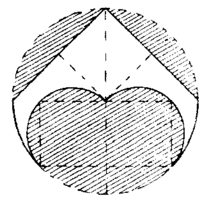

Fig. 29.

In Fig. 29 ist der nicht schraffierte Teil ebensogrofs, oder so grofs, wie das in die beiden kleinen Halbkreise eingeschriebene Rechteck.

In Fig. 30 ist der nicht schraffierte, krummlinige Mittelteil so grofs, wie die vier nicht schraffierten Dreiecke, und der Gesamtinhalt der nicht schraffierten Teile so grofs, wie das in den gröfsten Kreis eingeschriebene Quadrat.

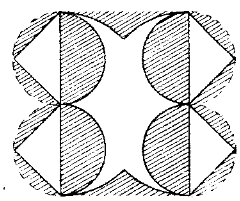

Fig. 30.

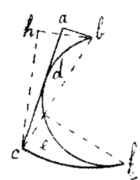

Fig. 31.

Fig. 31. Da das Sichelende e so grofs ist, wie der Kreisabschnitt d, was aus Fig. 19 hervorging, so ist die ganze Sichel bacf so grofs, wie das Dreieck bac. Setzt man aber über die Linie bc anstatt des Dreieckes bac ein beliebiges anderes Dreieck bhc, so ist der Flächeninhalt der dadurch entstehenden Sichel bhcf so grofs, wie der des Dreiekes bhc.

Daher ist in Fig. 32 der Flächeninhalt der Doppelsichel abfcg so grofs, wie der des Dreieckes abc.

Aus demselben Grunde ist in Fig. 33 die Doppelsichel so grofs, wie das Rechteck abcd.

In Fig. 34 ist der nicht schraffierte S-förmige Teil, der aus zwei Ringteilen zusammengesetzt ist, wie solche in den Figuren 20 und 26 vorkamen, so grofs, wie zwei Quadrate des Netzes, in welches

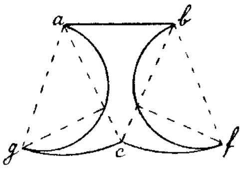

Fig. 32.

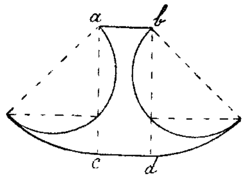

Fig. 33.

er gezeichnet ist, beträgt also ein Viertel desselben, während die schraffierten Teile der Figur zusammen drei Viertel dieses Netzes betragen.

Nach den in vorstehendem befolgten Grundsätzen, läfst sich eine unbegrenzte Zahl regelmäfsiger, krummliniger Figuren von bestimmbarem Flächeninhalte zusammensetzen.

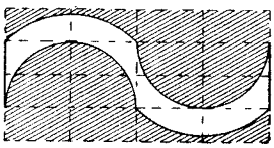

Fig. 34.

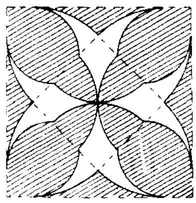

Fig. 35.

Bildet man aus vier Teilen von der Form Fig. 21 das Kreuz Fig. 35, so ist dessen Flächeninhalt so grofs, wie das hineinpunktierte, d. i. das in den mittleren Kreis eingeschriebene Quadrat. Das die Figur umschliefsende Quadrat ist das um den gröfsten Kreis beschriebene, daher betragen die schraffierten Teile dieser Figur ein Viertel, die schraffierten drei Viertel dieses umschriebenen Quadrates.

Zieht man von dem Mittelpunkte dieses Kreuzes zwei Strahlen nach den Endpunkten eines der vier Teile von der Form Fig. 21, so bilden diese einen Winkel, von dessen Hälfte die Tangente gleich $\sqrt{2} : 2 = 0{,}7071$ ist, woraus sich ergibt, dafs der einen der vier Teile einschliefsende Zentriwinkel gleich $70^0\ 32'$ ist. Man kann daher fünf solcher Teile um einen Mittelpunkt setzen, wie Fig. 36 zeigt. Alsdann ist der Flächeninhalt dieser fünfteiligen Rosette gleich fünf Viertel des in den mittleren Kreis eingeschriebenen Quadrates.

Sollen sich die fünf Teile dieser Rosette an ihren äufseren Spitzen berühren, so mufs man von den den Mittelpunkt berührenden Spitzen eine Länge abnehmen, die etwa dem zehnten Teile des mittleren Radius gleich ist, was auf die Gröfse des Flächeninhaltes dieser Teile keinen merklichen Einflufs hat.

Teilt man Fig. 35 durch Parallele mit den Seiten in vier gleiche Quadrate und kehrt diese um, so dafs ihre äufseren Ecken nun im Mittelpunkte der Figur zusammenstofsen, so entsteht Fig. 37. In dieser betragen die nicht schraffierten Teile (welche in Fig. 35 schraffiert sind) drei Viertel und die

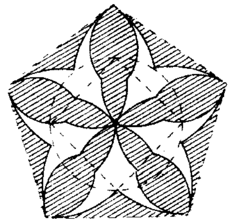

Fig. 36.

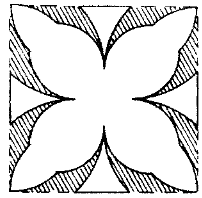

Fig. 37.

schraffierten Teile ein Viertel des umschriebenen Quadrates.

In Fig. 38 haben die vier nicht schraffierten Eckverzierungen von der Form Fig. 21 zusammen

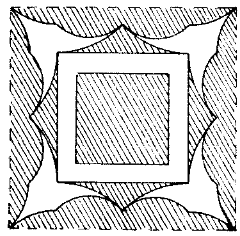

Fig. 38.

den gleichen Flächeninhalt, wie das innere schraffierte Quadrat und wie der nicht schraffierte Rahmen.

In Fig. 39 und 40 sind je vier Teile von der Form Fig. 21 wie Randverzierungen zusammengesetzt. Der Gesamtflächeninhalt der nicht schraffierten Teile

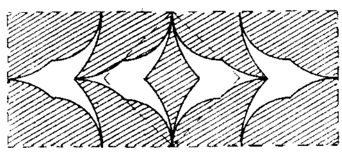

Fig. 39.

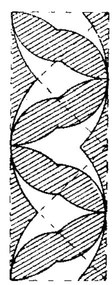

Fig. 40.

ist in Fig. 39 durch das hineinpunktierte Quadrat und in Fig. 40 durch zwei hineinpunktierte Dreiecke dargestellt.

In Fig. 41 ist der Flächeninhalt der schraffierten Teile durch die vier hineinpunktierten Dreiecke dargestellt, denn diese Figur entsteht durch Zusammensetzung zweier Figuren, wie Fig. 40.

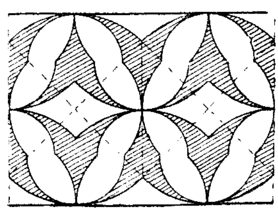

Fig. 41.

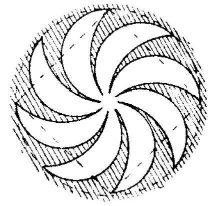

Fig. 42.

Fig. 42 zeigt eine aus acht Mondsicheln (Fig. 22) zusammengesetzte Rosette. Ihr Flächeninhalt ist gleich dem des hineinpunktierten Quadrates, welches in den die Rosette umschliefsenden Kreis eingeschrieben ist.

In Fig. 43 sind vier Mondsicheln (Fig. 22) und in Fig. 44 vier Teile von der Form Fig. 23 zu Randverzierungen zusammengesetzt und ihre Flächeninhalte durch hineinpunktierte Rechtecke dargestellt.

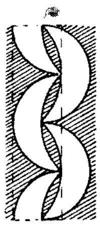
Fig. 43.

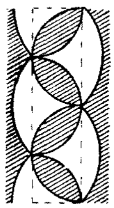
Fig. 44.

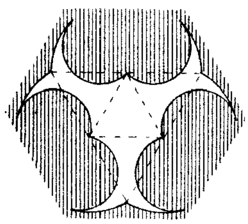
Fig. 45.

In Fig. 45 hat jede der drei Doppelsicheln denselben Flächeninhalt, wie das kleine punktierte gleichseitige Dreieck, auf dessen Seiten sie aufgesetzt sind, und die ganze nicht schraffierte Figur hat daher denselben Flächeninhalt, wie das punktierte gleichseitige Dreieck, welches viermal so grofs ist, als das genannte kleine.

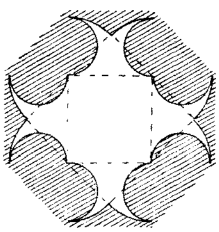
Fig. 46.

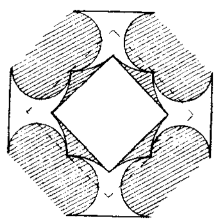
Fig. 47.

In Fig. 46 hat jede der vier Doppelsicheln ein Viertel des Quadrates, auf dessen Seiten sie gesetzt sind, zum Flächeninhalte und daher hat die ganze nicht schraffierte Figur denselben Flächeninhalt, wie das punktierte Quadrat, welches doppelt so grofs ist, als das zuerst genannte.

Das gleiche gilt von Fig. 47, welche durch Umkehrung und Versetzung der Doppelsicheln auf die Ecken des erstgenannten Quadrates aus Fig. 46 entsteht.

In Fig. 48 hat jede der fünf Doppelsicheln ein Fünftel des Fünfeckes, auf dessen Seiten sie gesetzt sind, zum Flächeninhalte, daher hat die ganze nicht schraffierte Figur den doppelten Flächeninhalt, als dieses Fünfeck, oder denselben Flächeninhalt, wie der hineinpunktierte fünfstrahlige Stern.

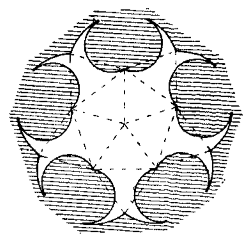
Fig. 48.

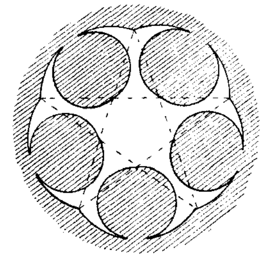
Fig. 49.

In Fig. 49 hat der nicht schraffierte Teil derselben den gleichen Flächeninhalt, wie der hineinpunktierte fünfstrahlige Stern (Pentagramm, Drudenfufs), welcher entsteht, wenn man die Seiten des Fünfeckes, auf dessen Seiten die Doppelsicheln gesetzt sind, verlängert.

Durch Kombination verschiedener der bisher betrachteten Grundformen lassen sich viele andere quadrierbare und zu Ornamenten wohl verwendbare Figuren finden, aber ins Unbegrenzte läfst sich deren Zahl vermehren, wenn man aus den bisher gefundenen Grundformen durch geeignete Teilung und Umkehrung der Teile gegeneinander neue Grundformen von dem gleichen Flächeninhalte bildet und diese wieder kombiniert. Hiermit wollen wir uns in einer späteren Abhandlung beschäftigen.

Druck von Ramm & Seemann in Leipzig.

Sonderabdruck aus der »Zeitschrift für gewerblichen Unterricht«. Jahrgang XVIII, No. 19 und 20.

Die Geometrie krummliniger Figuren Leonardo da Vinci's.

Fortsetzung

von Professor **Th. Beck** in Darmstadt.

Die erste von Leonardo betrachtete Figur entsteht aus einem gleichschenkligen Dreiecke, wenn über der einen der beiden gleichen Seiten ein Kreisabschnitt herausgeschnitten und über der andern angesetzt wird. Hierbei können sowohl die Winkel des Dreiecks, als auch der Zentriwinkel des Kreisabschnittes innerhalb gewisser Grenzen beliebig gewählt werden.

Wir betrachten zunächst die aus dem gleichseitigen Dreiecke entstehenden Figuren. Legt man den Mittelpunkt des angesetzten Kreisabschnittes auf die Grundlinie des Dreiecks, d. h. in diesem Falle in eine Dreiecksspitze, so entsteht Fig. 1; wählt man die Lage dieses Mittelpunktes so, dafs der Zentriwinkel des Kreisabschnittes ein rechter wird, so erhält man Fig. 2, und

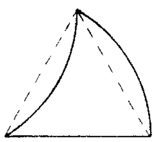
Fig. 1.

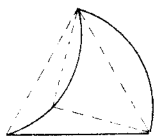
Fig. 2.

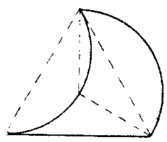
Fig. 3.

wenn man den Mittelpunkt so legt, dafs der Bogen des herausgeschnittenen Kreisabschnittes die Grundlinie tangiert, so ergibt sich Fig. 3.

Fügt man zwei der Grundformen Fig. 2 mit den geraden Seiten symmetrisch zusammen und legt drei solcher Paare oder Blätter mit den von den beiden ausgeschnittenen Kreisbogen gebildeten Spitzen in einen Mittelpunkt, so erhält man die dreiblätterige Rosette Fig. 4. Diese hat denselben Flächeninhalt wie das hineinpunktierte Sechseck; das darum punktierte ist doppelt so grofs, folglich haben die schraffierten Teile der Figur denselben Flächeninhalt wie die nicht schraffierte Rosette.

Wir werden in der Folge um alle Rosetten, bei denen dies möglich ist, ein regelmäfsiges Vieleck beschreiben, welches den doppelten Flächeninhalt hat; nur wenn ein solches Vieleck die Rosette nicht vollständig umfafst, werden wir ein Vieleck vom dreifachen Flächeninhalte um diese beschreiben, so dafs alsdann die schraffierten Teile der Figur zusammen einen doppelt so grofsen Flächeninhalt haben wie die nicht schraffierte Rosette.

Die Blätter der Rosette Fig. 4, sowie die aller folgenden Rosetten, lassen sich auch zu Randverzierungen, wie Fig. 5 und 6, zusammensetzen.

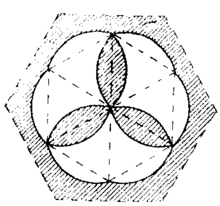
Fig. 4.

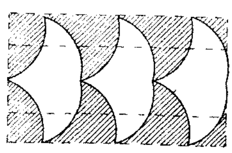
Fig. 5.

Legt man zwei Grundformen, wie Fig. 2, mit den geraden Seiten so aneinander, dafs je ein angesetzter und ein herausgeschnittener Kreisabschnitt mit den Enden aneinander stofsen, so können aus mehreren Exemplaren der so entstehenden Form Randverzierungen, wie Fig. 7

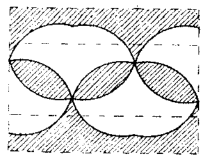
Fig. 6.

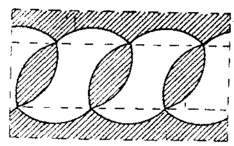
Fig. 7.

und 8 gebildet werden. In den Figuren 5—8 ist der Flächeninhalt der nicht schraffierten Teile durch das hineinpunktierte Rechteck angegeben, dessen Breite bei den Fig. 5 und 7 gleich der Höhe, bei den Fig. 6 und 8 aber gleich der Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks ist, von dem die Grundform abgeleitet ist. Das darum punktierte Rechteck ist doppelt so breit, daher sind die schraffierten Teile einer jeden dieser Figuren zusammen ebensogrofs wie die nicht schraffierten.

Zieht man von der linken Spitze der Fig. 2 aus eine Linie cd (Fig. 9) welche mit der Grundlinie den Winkel $\beta = 45^0$ bildet, führt von dem Punkte e, in dem diese Linie den linken Kreisbogen schneidet, einen geraden Schnitt ef nach dem rechten Ende der Grundlinie und kehrt den oberen Teil der Figur um, so erhält man eine Grund-

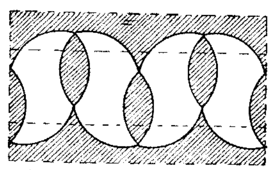
Fig. 8.

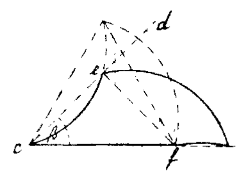

Fig. 9.

form, wovon acht Exemplare so um einen Punkt gruppiert werden können, dafs die Punkte c und e immer mit dem benachbarten Exemplare in Berührung treten. Setzt man dabei je zwei Exemplare mit den geraden Seiten symmetrisch aneinander, so erhält man die vierblätterige Rosette Fig. 10. Ihr Flächeninhalt ist achtmal so grofs, als der des gleichseitigen Dreieckes, woraus die Grundform entstand. Ist h dessen Höhe und s die Seite eines Quadrates, welches doppelt so grofs ist wie die Rosette, so mufs sein: $s^2 = 16 h^2 \operatorname{tg} 30^0$, woraus sich ergibt: $s = 3{,}04\,h$. Ein Quadrat mit dieser Seitenlänge ist in Fig. 10 um die Rosette beschrieben.

Gibt man der Linie cd 36^0 Neigung gegen die Grundlinie und verfährt im übrigen wie vorher, so tritt ein kleiner Teil des umgekehrten angesetzten Kreisabschnitts über die Linie ad, weshalb die entstehende neue Form

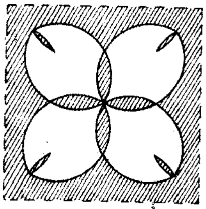

Fig. 10.

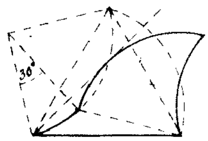

Fig. 11.

zur Bildung einer fünfblätterigen Rosette nicht zu gebrauchen ist.

Wählt man β kleiner, so bilden nach der Umkehrung des oberen Teiles der Figur die beiden Kreisbogen am linken Ende der Schnittlinie einen einspringenden Winkel, wie in den Fig. 11 und 13. In Fig. 11 ist der stehengebliebene Teil des linken Kreisbogens ein solcher von 30^0, und die Tangente, welche von dem linken Ende der Grundlinie an den oberen Kreisbogen gezogen wird, bildet mit der Gründlinie einen Winkel von 45^0. Es kann daher auch aus dieser Grundform eine vierblätterige Rosette (Fig. 12) gebildet werden.

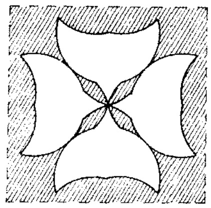

Fig. 12.

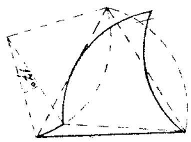

Fig. 13.

In Fig. 13 ist der stehengebliebene Teil des linken Kreisbogens ein solcher von 17^0 und die Tangente, welche vom linken Ende der Grundlinie an den oberen Kreisbogen gezogen wird, bildet mit der Grundlinie einen Winkel von 60^0. Diese Grundform eignet sich daher zur Bildung der dreiblätterigen Rosette Fig. 14.

Wenn man die Grundform Fig. 2 in zwei Teile schneidet und durch Umkehrung der Teile gegen einander eine neue Grundform bilden will, ist es bezüglich des Resultates gleichgültig, ob man den unteren Teil festhält und den oberen umkehrt oder ob man den oberen Teil festhält und den unteren umkehrt.

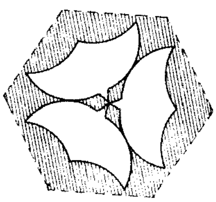

Fig. 14.

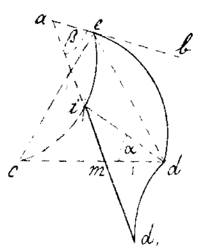

Fig. 15.

Wird von dem rechten Ende der Grundlinie aus ein gerader Schnitt i d (Fig. 15) geführt, der mit der Grundlinie c d einen Winkel α bildet, und wird der von diesem Winkel umschlossene Teil der Figur umgekehrt, so bildet die neue Lage i d_1 der Grundlinie mit der ursprünglichen Lage c d den Winkel $2\,\alpha$, weil $\angle$ i m c Aufsenwinkel des gleichschenkligen Dreieckes i m d ist. Die Tangente a b am oberen Ende des angesetzten Kreisabschnittes bildet mit der auf die Grundlinie gefällten Senkrechten einen Winkel von $30^0 + 45^0 = 75^0$, also mit der Grundlinie einen solchen von 15^0. Daher ist der Winkel, den die Tangente a b mit der geraden Seite der neuen Grundform bildet: $\beta = 2\,\alpha - 15^0$.

Macht man $\alpha = 37^1/_2{}^0$, so wird $\beta = 60^0$, und man kann aus der entstehenden Grundform die dreiblätterige Rosette Fig. 16 bilden. Nimmt man $\alpha = 30^0$, so wird $\beta = 45^0$ und man erhält die vierblätterige Rosette Fig. 17. $\alpha = 25^1/_2{}^0$ ergibt $\beta = 36^0$ und die fünfblätterige Rosette Fig. 18. Bei dieser überragen die äufsersten Spitzen des Blätter die Ecken des regelmäfsigen Fünfeckes, welcher doppelt so grofs ist, als die Rosette, weshalb wir ein regelmäfsiges Fünfeck um die Rosette beschrieben haben, welches dreimal so grofs ist, als diese. Eine sechsblätterige Rosette entsteht, wenn $\alpha = 22^1/_2{}^0$ genommen wird usw.

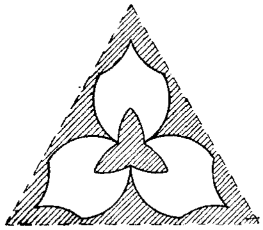

Fig. 16.

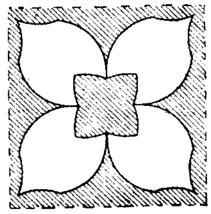

Fig. 17.

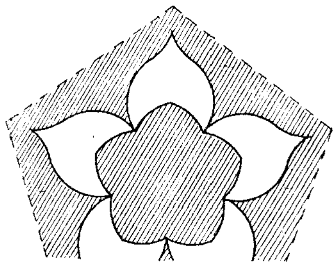

Fig. 18.

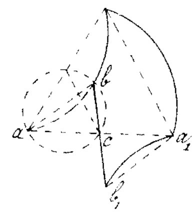

Fig. 19.

Errichtet man auf der Hälfte a c der Grundlinie (Fig. 19) ein gleichschenkliges Dreieck, das an der Spitze einen gegebenen Winkel β hat, und beschreibt darum einen Kreis, so ist, wenn dieser den Bogen des herausgeschnittenen Kreisabschnittes in einem Punkte b schneidet, auch $\angle$ a b c $= \beta$. Führt man nun nach der Linie b c einen Schnitt und dreht den linken Teil der Figur so um den Punkt c_1, dafs die beiden Hälften der Grundlinie zusammenfallen, so entsteht eine neue Grundform, welche am unteren Ende von dem Winkel β umschlossen wird. Nimmt man $\beta = 60^0$, so kann aus der entstehenden Grundform die dreiblätterige Rosette Fig. 20 gebildet werden. Der Flächeninhalt des darum punktierten Dreieckes ist ebensogrofs, wie der des darum punktierten Sechseckes und doppelt so grofs, als der der Rosette. Wird $\beta = 45^0$ genommen, so entsteht wieder die Grundform Fig. 10, und bei $\beta = 36^0$ fällt b nach rechts von der Mittellinie des gleichseitigen Dreieckes, so dafs die oberen Spitzen der so entstehenden Grundform sich überdecken müfsten, wenn man diese paarweise mit den geraden Seiten aneinander legen wollte, weshalb sie zur Rosettenbildung nicht tauglich ist.

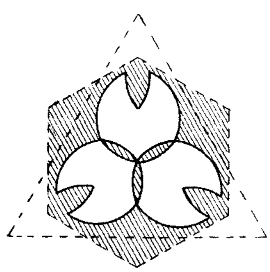

Fig. 20.

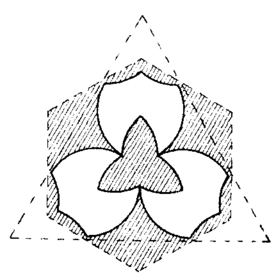

Fig. 21.

Bildet der durch die Mitte der Grundlinie gehende Schnitt b c (Fig. 19) mit der Grundlinie einen Winkel α, so ist der Winkel β, welchen die Schnittlinie mit der an das obere Ende des angesetzten Kreisabschnittes gezogenen Tangente bildet, gleich $\alpha - 15^0$, weil die Tangente mit der auf die Grundlinie gefällten Senkrechten einen Winkel von 75^0 bildet. Nimmt man $\alpha = 75^0$, so wird $\beta = 60^0$, und es läfst sich aus der entstehenden Grundform die dreiblätterige Rosette Fig. 21 bilden. $\alpha = 60^0$ ergibt $\beta = 45^0$ und die vierblätterige Rosette Fig. 22. Die äufsersten Ecken der Blätter dieser Rosette treten bereits aus dem Quadrate vom doppelten Flächeninhalte, wes-

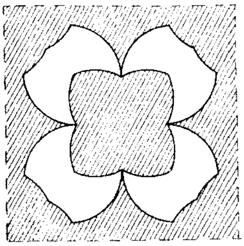

Fig. 22.

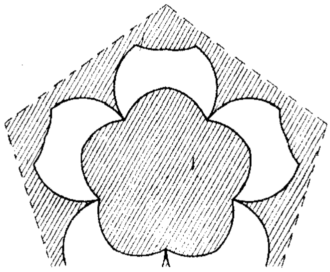

Fig. 23.

halb wir ein Quadrat vom dreifachen Flächeninhalte derselben darum punktiert haben. Bei $\alpha = 51^0$ erhält man $\beta = 36^0$ und die fünfblätterige Rosette Fig. 23 u. s. f.

Führt man von der Mitte der Grundlinie aus den Schnitt nach rechts ansteigend, so dafs er mit der Grundlinie einen Winkel α (Fig. 24) bildet und dreht den zwischen den Schenkeln dieses Winkels liegenden Teil der Figur so um den Punkt c, dafs die beiden Hälften der Grundlinie zusammenfallen, so entsteht eine neue Grundform, deren linkes Ende von dem Winkel $\beta = 60^0 - \alpha$ umschlossen wird. Bei $\alpha = 15^0$ erhält man $\beta = 45^0$ und die vierblätterige Rosette Fig. 25; bei $\alpha = 24^0$ erhält man $\beta = 36^0$ und die fünfblätterige Rosette Fig. 26, bei $\alpha = 30^0$ erhält man β auch gleich 30^0 und eine sechsblätterige Rosette usw.

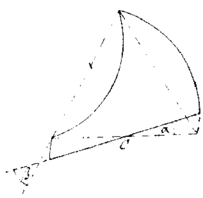

Fig. 24.

Aehnliche Figuren ergeben sich, wenn man von der linken Ecke aus in gleicher Weise Schnitte führt, die mit der Grundlinie Winkel von $7^1/_2{}^0$, 12^0 und 15^0 bilden (Fig. 27); doch sind die so erhaltenen neuen Grundformen

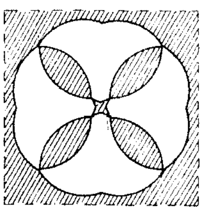

Fig. 25.

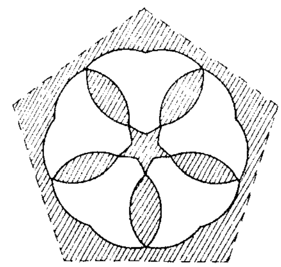

Fig. 26.

ein wenig breiter und dagegen am linken Ende mehr abgestumpft. Eine fünfblätterige Rosette dieser Art zeigt beispielsweise Fig. 28.

Bildet die Schnittlinie c c_1 (Fig. 29) mit der Grundlinie einen Winkel α, der gröfser ist als 15^0, so wird der Bogen des ausgeschnittenen Kreisabschnittes in einem Punkte n geschnitten, und durch Umkehrung der Teile gegeneinander entsteht die neue Grundform n e n_1 c_1 d_1. Winkel c n e hat als Peripheriewinkel, der $^3/_4$ des Kreises überspannt, 135^0 und Winkel e n $c_1 = 180^0 - 135^0 = 45^0$.

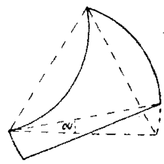

Fig. 27.

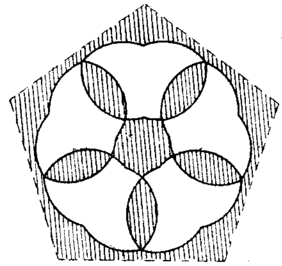

Fig. 28.

Dieser ist Aufsenwinkel des $\triangle$ c_1 n i und da $\angle$ c c_1 i $= \alpha$ so ist $\angle$ e i c_1, $= \beta = 45^0 - \alpha$. Da aber α hier gröfser ist als 15^0, so wird β kleiner als 30^0, und deshalb sind derartige Grundformen, die aus Fig. 2 hergeleitet werden nur zur Bildung von Rosetten oder Kränzen geeignet, welche mehr als sechs Blätter haben.

Zieht man von dem linken Ende c der Grundlinie aus eine Linie c a (Fig. 30), die mit der Grundlinie einen Winkel von 45^0 bildet und den Bogen des ausgeschnittenen Kreisabschnittes in dem Punkte n schneidet, führt vom Mittelpunkte o dieses Kreisabschnittes aus einen geraden Schnitt n m durch die Figur und kehrt den oberen Teil derselben um, so entsteht eine neue Grundform, aus welcher die vierblätterige Rosette (Fig. 31) gebildet werden kann. Macht man den Winkel a c d gleich 36^0, so geht der Schnitt schon durch die Grundlinie. Eine Rosette dieser Art mit mehr als vier Blättern zu bilden, ist daher im vorliegenden Falle nicht möglich.

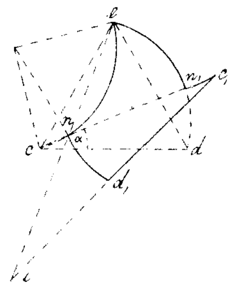

Fig. 29.

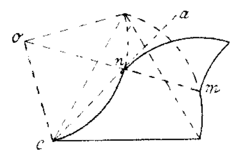

Fig. 30.

Behandelt man die Grundform Fig. 3 auf dieselbe Weise, wie wir seither Fig. 2 behandelt haben, so entstehen ähnliche neue Grundformen mit stärker gekrümmten Begrenzungslinien.

Analog Fig. 4 läfst sich aus der Grundform Fig. 3 die dreiblätterige Rosette Fig. 32 bilden, auch kann sie, wie in den Fig. 5—8 geschehen, zu Randverzierungen verwendet werden.

Nach Art von Fig. 9 und 10 kann eine vierblätterige Rosette aus Fig. 3 nicht gebildet werden, weil sich die Enden der Blätter überdecken würden; dagegen läfst sich in dieser Weise, wenn man $\beta = 36^0$ macht, die fünfblätterige Rosette Fig. 33 bilden.

Zieht man von dem linken Ende der Grundlinie aus eine Linie c a (Fig. 34), welche mit der Grundlinie einen Winkel von 30^0 bildet, führt von dem Punkte n aus, in dem diese

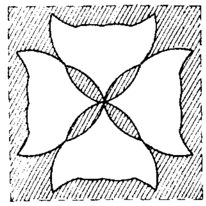

Fig. 31.

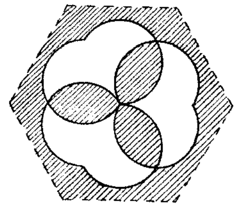

Fig. 32.

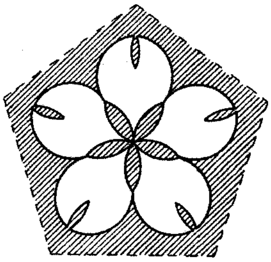

Fig. 33.

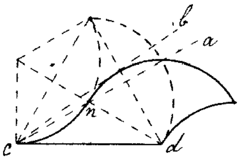

Fig. 34.

Linie den linken Kreisbogen schneidet, einen geraden Schnitt nd nach dem rechten Ende der Grundlinie, so bildet dieser ebenfalls einen Winkel von 30⁰ mit der Grundlinie, und seine Verlängerung geht durch den Mittelpunkt des ausgeschnittenen Kreisabschnittes. Kehrt man den oberen Teil der Figur um, so tritt der umgekehrte Teil des angesetzten Kreisabschnittes zum Teil über die Linie ca, und die von c aus an ihn gezogene Tangente ab bildet mit der Grundlinie einen Winkel von 36⁰. Aus dieser neuen Grundform kann daher ebenfalls eine fünfblätterige Rosette (Fig. 35) gebildet werden.

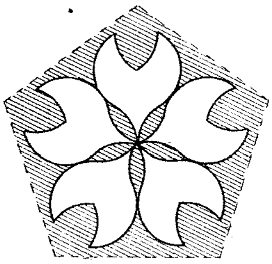

Fig. 35.

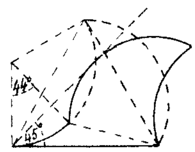

Fig. 36.

Analog Fig. 11 erhält man die Grundform (Fig. 36) zu einer vierblätterigen Rosette, wenn der stehenbleibende Teil des linken Kreisbogens ein solcher von 44⁰ ist, und die Grundform zu einer dreiblätterigen Rosette (Fig. 37) erhält man, wenn dieser stehenbleibende Teil des linken Kreisbogens ein solcher von 27⁰ ist.

Will man analog den Fig. 17—19 auf Grund von Fig. 3 Rosetten bilden, so ist zu beachten, dafs bei dieser die Tangente an dem oberen Ende des angesetzten Kreisabschnittes mit der Grundlinie parallel ist und daher $\beta = 2\alpha$ wird. Um die Grundformen zu drei-, vier-, fünf- und sechsblätterigen Rosetten zu erhalten, hat man daher die Winkel $\alpha = 30^0$, $22\frac{1}{2}^0$, 18^0 und 15^0 zu machen.

Analog Fig. 20 läfst sich aus Fig. 3 eine dreiblätterige Rosette bilden, eine vierblätterige aber nicht, weil die Enden der Blätter sich überdecken würden.

Führt man, wie bei den Fig. 21—23, von der Mitte der Grundlinie aus einen unter dem Winkel α nach links geneigten Schnitt und dreht den von diesem Winkel umschlossenen Teil der Figur so um, dafs die beiden Hälften der Grundlinie zusammenfallen, so ist der Winkel β,

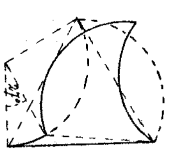

Fig. 37.

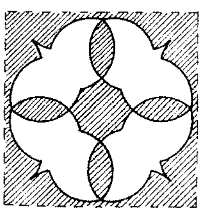

Fig. 38.

den die gerade Seite der dadurch entstehenden Grundform mit der Tangente an dem oberen Ende des angesetzten Kreisabschnittes bildet, gleich α, weil diese Tangente mit der Grundlinie parallel läuft. Macht man $\alpha = 60^0$, 45^0, 36^0 oder 30^0, so lassen sich daher aus den so entstehenden neuen Grundformen drei-, vier-, fünf- und sechsblätterige Rosetten nach Art der Fig. 21—23 bilden, deren Begrenzungslinien jedoch stärker gekrümmt sind.

Dasselbe gilt von den nach Art der Fig. 23—26 aus Fig. 3 gebildeten neuen Grundformen.

Führt man von der linken Ecke aus Schnitte durch die Grundform Fig. 3, welche mit der Grundlinie Winkel von 15⁰, 24⁰ oder 30⁰ bilden und kehrt den von diesem Winkel umschlossenen Teil der Figur um, so erhält man neue Grundformen nach Art der Fig. 29, welche sich zur

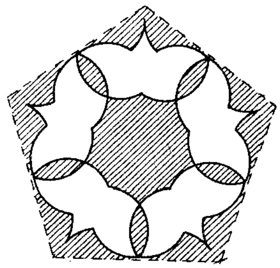

Fig. 39.

Bildung vier-, fünf-, und sechsblätteriger Rosetten eignen. Hiervon sind die beiden erstgenannten in Fig. 38 und Fig. 39 dargestellt.

Zieht man vom linken Ende der Grundlinie eine Linie ca (Fig. 40), welche mit ersterer einen Winkel von 45⁰ bildet und den Bogen des ausgeschnittenen Kreisabschnittes in einem Punkte n schneidet, so liegt hier Punkt n mit dem Mittelpunkt o dieses Kreisabschnittes auf einer Parallelen zur Grundlinie. Führt man in der Richtung dieser einen Schnitt nm durch die Figur und kehrt ihren oberen Teil um, so kommt ein kleiner Teil des angesetzten Kreisabschnittes über die Linie ca zu liegen. Um eine neue Grundform, welche zur Bildung einer vierblätterigen Rosette geeignet ist, zu erhalten, mufs man daher dem vom Mittelpunkte des ausgeschnittenen Kreisabschnittes ausgeführten Schnitt op eine

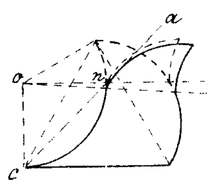

Fig. 40.

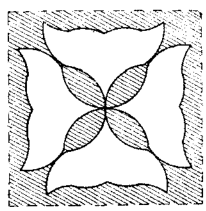

Fig. 41.

Neigung von 4⁰ gegen die Grundlinie geben. Alsdann erhält man die vierblätterige Rosette Fig. 41.

Führt man den Schnitt vom Mittelpunkte des herausgeschnittenen Kreisbogens nach dem rechten Ende der Grundlinie, so erhält man wieder die Grundform Fig. 34, die sich zur Bildung einer fünfblätterigen Rosette eignet.

Die Zahl der erwähnten Rosetten, von denen jedes Blatt den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks hat, woraus seine Grundform entstanden ist, beträgt bereits 40; wollten wir aber unsere Betrachtungen auf Fig. 1, sowie auf gleichschenkelige Dreiecke ausdehnen, welche an der Grundlinie Winkel von 45⁰, 36⁰ und 30⁰ haben, so würde sie auf etwa das dreifache anwachsen.

Druck von Ramm & Seemann in Leipzig.